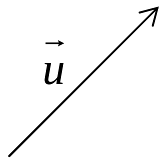
VECTEURS et REPERAGE

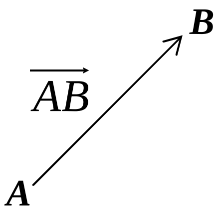
Classe de 2^{nde}

I. Définitions :

- Une unité de longueur étant choisie dans le plan, un vecteur $\vec{u}$ est caractérisé par :
  - **sa direction**
  - **son sens**
  - **sa longueur** (appelée **norme** et notée $\|\vec{u}\|$).



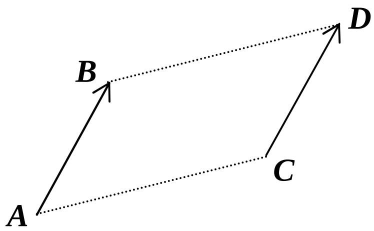
- Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, on dit que $\overrightarrow{AB}$ est un **représentant** de $\vec{u}$, et de plus :
  - sa direction est (AB)
  - son sens est de A vers B
  - et sa norme : $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.



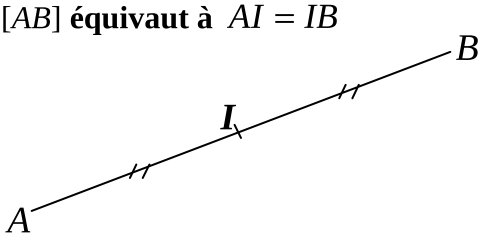
II. Propriétés caractéristiques :

Les propriétés suivantes sont **équivalentes** :

(1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
(2) Le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme
(3) Les segments [AD] et [BC] ont même milieu
(4) D l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



<u>Caractérisation du milieu</u> : I milieu du segment [AB] **équivaut à** $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

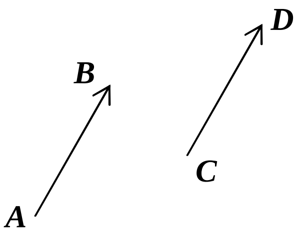


<u>Exemple</u> : Soit O le milieu respectif des segments [IJ] et [KL]. On peut en déduire que : $ILJK$ est un parallélogramme; $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{KJ}$; $\overrightarrow{JL} = \overrightarrow{KI}$; J est l'image de L par la translation de vecteur $\overrightarrow{KI}$; $\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{OJ}$; $\overrightarrow{KO} = \overrightarrow{OL}$; …

III. Vecteurs égaux, vecteurs opposés :

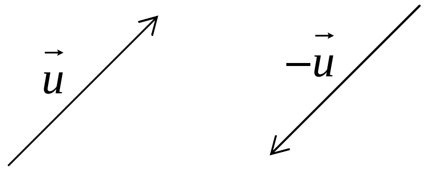
III.1 <u>Vecteurs égaux</u> :

- Deux vecteurs sont *<u>égaux</u>* s'ils ont :
  - même direction
  - même sens
  - même longueur



III.2 <u>Vecteurs opposés</u> :

- Deux vecteurs sont *<u>opposés</u>* s'ils ont :
  - même direction
  - même longueur
  - leurs sens opposés

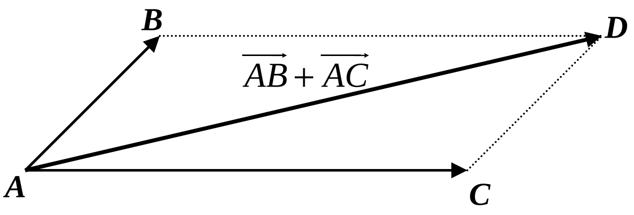


- En particulier : l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$, noté $-\overrightarrow{AB}$ est égal à : $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.
  On remarque que : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ($\vec{0}$ est appelé vecteur nul)

IV. Opérations sur les vecteurs :

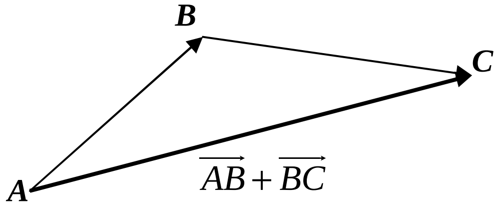
IV.1 Addition de vecteurs :

a) Règle du parallélogramme



$$\boxed{\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}$$

b) Relation de CHASLES



$$\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$$

Exemple : On sait que *ABCD* est un parallélogramme et que *I* est le milieu de [*AC*]. Simplifier l'expression vectorielle suivante : $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{CI}$.

Comme *ABCD* est un parallélogramme alors : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et comme *I* est milieu de [*AC*] alors : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IC}$

$$\begin{aligned}
\underbrace{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}}_{\overrightarrow{AB}}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{CI} &= \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{CI}\\
&= \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IC}\\
&= \vec{0}+\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AI}\\
&= \vec{0}+\vec{0}\\
&= \vec{0}
\end{aligned}$$

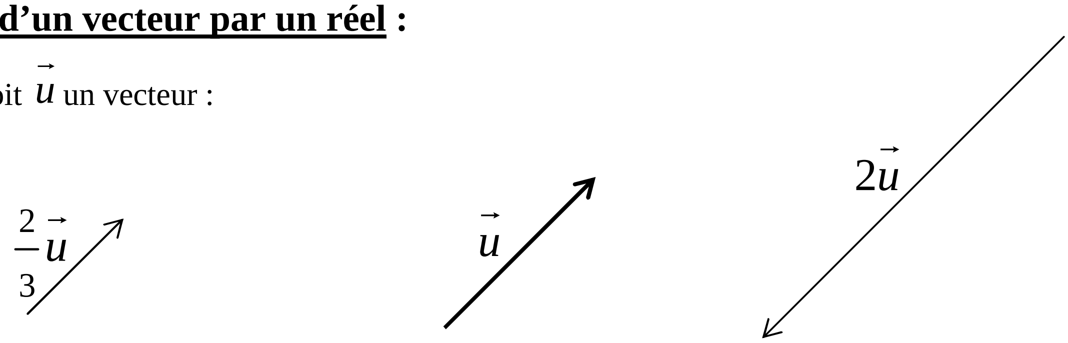
Relation de Chasles

IV.2 Soustraction de vecteurs :

• On se ramène à une addition de vecteurs en écrivant que : $\boxed{\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)}$

V. Produit d'un vecteur par un réel :

Exemple : Soit $\vec{u}$ un vecteur :



Le vecteur $\frac{2}{3}\vec{u}$ est de :

- même direction que $\vec{u}$
- même sens car $\frac{2}{3}>0$
- norme les $\frac{2}{3}$ de celle de $\vec{u}$

Le vecteur $-2\vec{u}$ est de :

- même direction que $\vec{u}$
- de sens contraire car $-2<0$
- norme 2 fois celle de $\vec{u}$

Cas général :

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k en réel non nul, le vecteur $\vec{v}$ défini par $\vec{v} = k\vec{u}$ est :

- de même direction que $\vec{u}$
- de même sens si k est positif, de sens contraire si k est négatif.
- de norme k fois celle de $\vec{u}$ si k est positif et de $(-k)$ fois celle de $\vec{u}$ si k est négatif.

Propriétés :

- $0\times\vec{u} = \vec{0}$ et $k\times\vec{0} = \vec{0}$
- $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u}+k\vec{v}$
- $k\vec{u}+k'\vec{u} = (k+k')\,\vec{u}$

Exemple : Simplifier l'expression vectorielle suivante : $3\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}\right)-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}3\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}\right)-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{AC} &= 3\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{BE}-2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AC}\\ &= 2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BE}\\ &= 2\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}\right)\end{aligned}$$

VI. Colinéarité de 2 vecteurs :

VI.1 Définition :

• Deux vecteurs non nuls sont **colinéaires** si et seulement si ils ont même direction.

Remarque : le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$.

VI.2 Propriété :

• **Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, s'il existe un réel k non nul tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.**

Exemple : On sait que : $\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right) = \overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AB}$. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.

$$\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right) = \overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}-2\right)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{4}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AM}$$

En conclusion, comme $\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AM}$, c'est-à-dire comme $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AM}$ avec $k = -\frac{4}{5}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont **colinéaires**.

VI.3 Applications :

> - **Parallélisme de 2 droites :**
>   Soient A, B, C et D quatre points du plan,
>   **(AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.**

Exemple : On sait que : $\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)=\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{BE}-3\overrightarrow{DE}$. Démontrer que les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

$$\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)=\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{BE}-3\overrightarrow{DE}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+3\left(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{DE}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+3\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{ED}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{BD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{BD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}-1\right)\overrightarrow{AC}=\left(3-\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{BD}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{7}{3}\overrightarrow{BD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=-\frac{3}{1}\times\frac{7}{3}\overrightarrow{BD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=-7\overrightarrow{BD}$$

En conclusion, comme $\overrightarrow{AC}=-7\overrightarrow{BD}$, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires donc les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

> - **Points alignés :**
>   Soient A, B et C trois points distincts du plan ;
>   ***A*, *B* et *C* sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.**

Exemple : On sait que : $3\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)=2\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AB}$. Démontrer que les points A, B et D sont alignés.

$$3\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)=2\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BD}$$

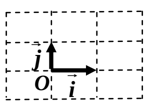
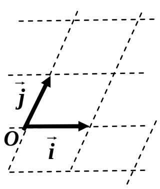
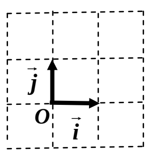
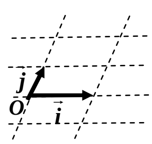
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$$

En conclusion, comme $\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires, les points A, B et D sont alignés.

VII. Repérage et coordonnées – Géométrie analytique :

VII.1 Définition :

• La donnée dans l'ordre de trois points quelconques non alignés d'un plan définit un repère de ce plan.
Exemple : (O, I, J) repère du plan.
Si on pose $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$, ce repère se note aussi $(O;\vec{i},\vec{j})$.

• Lorsque $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux, on dit que la base (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) est **orthogonale** 	• Lorsque $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de norme 1 on dit que la base (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) est **normée** 	• Lorsque $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et de norme 1, on dit que la base (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) est **orthonormée** ou **orthonormale** 	• Lorsque $\vec{i}$ et $\vec{j}$ n e sont pas orthogonaux et ont des normes différentes de 1, on dit que la base (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) est **quelconque** 

VII.2 Propriétés :

- Pour tout point M du plan, il existe un couple unique de réels (x ; y) tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

x est l'abscisse de M et y son ordonnée.

(x ; y) est le couple de coordonnées de M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Si A et B sont deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ alors :
  - $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.
  - $k\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(k(x_B - x_A); k(y_B - y_A))$.
  - Le milieu I de [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_B + x_A}{2}; \frac{y_B + y_A}{2}\right)$.
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales :

$\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ vecteurs égaux équivaut à $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

- Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ alors $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$

Exemple : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Soit les points A(−3 ; 2), B (1 ; 3), C (−1 ; 1) et D(3 ; 2).

1. Calculer les coordonnées du point I milieu de [AC]. $I\left(\frac{-3+1}{2}; \frac{2+3}{2}\right)$ d'où $\boxed{I\left(\frac{-2}{2}; \frac{5}{2}\right)}$

2. Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB}(1-(-3); 3-2)$ d'où $\boldsymbol{\overrightarrow{AB}(4;1)}$; $\overrightarrow{CD}(3-(-1); 2-1)$ d'où $\boldsymbol{\overrightarrow{CD}(4;1)}$. Donc $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}}$.

3. Calculer les cordonnées du vecteur $3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AC}(-1-(-3); 1-2)$ d'où $\boldsymbol{\overrightarrow{AC}(2;-1)}$; $3\overrightarrow{AB}(3\times 4; 3\times 1)$ d'où $\boldsymbol{3\overrightarrow{AB}(12;3)}$.

Au final : $3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}(12+2; 3+(-1))$ soit $\boxed{3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}(14;2)}$.

VIII.3 Caractérisation analytique de la colinéarité :

- Les vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$

Exemple : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Soit les points A(−3 ; 2), $B\left(\frac{1}{3}. -2\right)$ et $C\left(\frac{-47}{9}; \frac{14}{3}\right)$.

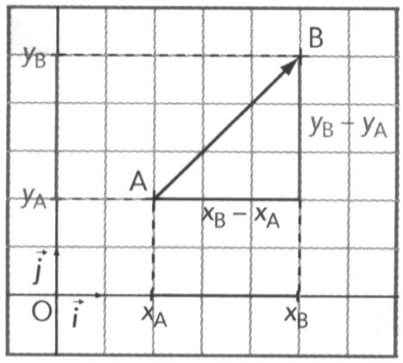
1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{3} - (-3); -2-2\right)$ d'où $\overrightarrow{AB}\left(\frac{10}{3}; -4\right)$; $\overrightarrow{AC}\left(-\frac{47}{9} - (-3); \frac{14}{3} - 2\right)$ d'où $\overrightarrow{AC}\left(-\frac{20}{9}; \frac{8}{3}\right)$

On effectue le calcul de $x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}} - x_{\overrightarrow{AC}} \times y_{\overrightarrow{AB}}$: $\frac{10}{3} \times \frac{8}{3} - \left(-4 \times \left(-\frac{20}{9}\right)\right) = \frac{80}{9} - \frac{80}{9} = 0$

Comme $x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}} - x_{\overrightarrow{AC}} \times y_{\overrightarrow{AB}} = 0$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

VII.3 <u>Distance dans un repère orthonormal</u> :



• Soit A et B deux points de coordonnées respectives $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

• La **distance** AB (où norme $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donnée par :

$$\boldsymbol{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Remarque : La vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A)$;

Le carré de sa norme est $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

<u>Exercice</u> :

On donne les points $A(-2\ ;5)$, $B(2\ ;-1)$ et $C(5\ ;1)$

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

2. Calculer les coordonnées du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle.

<u>Réponses</u> :

1.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(2-(-2))^2 + (-1-5)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 6^2} \\ &= \sqrt{16+36} \\ &= \sqrt{52} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(5-(-2))^2 + (1-5)^2} \\ &= \sqrt{7^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{49+16} \\ &= \sqrt{65} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(5-2)^2 + (1-(-1))^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{9+4} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

On remarque que : $AC^2 = 65$ et que $AB^2 + BC^2 = 52 + 13 = 65$

Comme $AC^2 = AB^2 + BC^2$, la réciproque du théorème de Pythagore permet d'affirmer que le triangle ABC est rectangle en B.

2. On sait que $ABCD$ est un rectangle, c'est-à-dire un parallélogramme avec le triangle ABC rectangle en B.
$ABCD$ parallélogramme équivaut à l'égalité vectorielle suivante : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

$\overrightarrow{AB}(4;-6)$

$\overrightarrow{DC}(x_C - x_D; y_C - y_D)$

$\overrightarrow{DC}(5 - x_D; 1 - y_D)$

L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à $\begin{cases} 5 - x_D = 4 \\ 1 - y_D = -6 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x_D = 1 \\ y_D = 7 \end{cases}$

Les coordonnées du point D sont $D(1\ ;7)$.