Chapitre | **PROBABILITES**

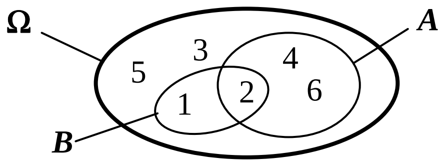
I. Notions de fréquence statistique et de probabilité :

• La **fréquence** décrit les résultats d'une expérience réalisée. La **probabilité** décrit les « chances » qu'à une expérience de se produire. Il s'agit donc d'**expériences aléatoires** puisqu'on ne peut pas prévoir à l'avance le résultat avec certitude.

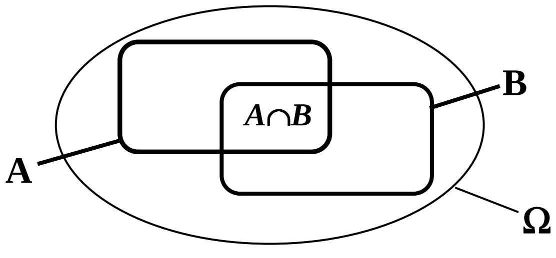
II. Langage des probabilités :

• L'**univers** est l'ensemble possible d'une expérience aléatoire. Il est noté **Ω**.
• Un **évènement** est une partie de l'univers, c'est à dire un ensemble de résultats possibles.
• Un **évènement** est dit **élémentaire** s'il ne possède qu'un seul résultat possible.

<u>Exemple 1</u> : Expérience aléatoire : un lancé d'un dé à six faces ; résultats possibles : 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
L'univers de cette expérience aléatoire est :
$\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
« obtenir un résultat pair » est un événement ; on le note A ; on peut écrire $A = \{ 2, 4, 6 \}$
« obtenir un résultat inférieur ou égal à 2 » est un événement ; on le note B ; on peut écrire $B = \{ 1, 2 \}$
« obtenir un 6 » est un événement élémentaire, il se note $\{ 6 \}$.



Soit un univers Ω, A et B deux événements de Ω :
- On appelle **événement contraire** de l'événement A, l'événement noté $\overline{A}$ contenant tous les éléments de Ω ne se trouvant pas dans A.
- On appelle **réunion** de A et B, l'événement noté $A \cup B$ contenant tous les éléments de A et de B.
- On appelle **intersection** de A et B, l'événement noté $A \cap B$ contenant les éléments qui appartiennent à la fois à A et à B.
- On dira que deux événements sont **incompatibles** ou **disjoints** si leur intersection est vide, c'est à dire si ces deux événements ne peuvent se réaliser simultanément.



Dans l'exemple 1 : $\overline{A} = \{ 1, 3, 5 \}$; $A \cup B = \{ 1, 2, 4, 6 \}$; $A \cap B = \{ 2 \}$
$\overline{A \cup B} = \{ 3, 5 \}$; $\overline{A \cap B} = \{ 1, 3, 4, 5, 6 \}$
Soit C l'événement « obtenir un résultat impair » : $C = \{ 1, 3, 5 \}$. A et C sont deux événements disjoints, d'où $A \cap C = \varnothing$.

III. Probabilité sur un univers Ω fini :

1. Définition, notation :

• Dans un univers Ω fini, la **probabilité** d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.
• A étant une partie de l'univers fini Ω, la probabilité de l'événement A est notée $\boldsymbol{P(A)}$.
• Un univers sur lequel est défini une probabilité est appelé **univers probabilisé**.

2. Equiprobabilité :

• Il y a **équiprobabilité** lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être obtenu. Dans cette hypothèse, on peut associer à tout événement A, une probabilité $P(A)$ définie par :

$$P(A)=\frac{nombre\ \ de\ \ cas\ \ \ favorables\ \ à\ \ la\ \ réalisation\ \ de\ \ A}{nombre\ \ de\ \ cas\ \ \ possibles}$$

Exemple : l'exemple 1 du lancé d'un dé à six faces équilibré, est une expérience aléatoire où chaque face (événement élémentaire) a la même probabilité que chaque autre d'être obtenue. L'univers probabilisé Ω comportant six éléments est munis une loi d'équiprobabilité.

$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Il y a trois chances sur six soit une chance sur deux d'obtenir un nombre pair.

$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Il y a deux chances sur six soit une chance sur trois d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 2.

$P\left(\overline{A}\right)=P\left(C\right)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Il y a trois chances sur six soit une chance sur deux de ne pas obtenir un nombre pair c'est à dire d'obtenir un nombre impair.

$P(A\cup B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Il y a quatre chances sur six soit deux chances sur trois d'obtenir un nombre pair **ou** inférieur ou égal à 2.

$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$. Il y a une chance sur six d'obtenir un nombre pair **et** inférieur ou égal à 2.

$P(\overline{A\cup B})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Il y a deux chances sur six soit une chance sur trois de ne pas obtenir un nombre pair **ou** inférieur ou égal à 2.

$P(\overline{A\cap B})=\frac{5}{6}$. Il y a cinq chances sur six de ne pas obtenir un nombre pair **et** inférieur ou égal à 2.

Exercice 1 : Expérience aléatoire : un seul lancé de deux dés à six faces discernables (par exemple un dé de couleur rouge et l'autre dé de couleur jaune).

1. Ecrire l'univers Ω.

2. Ecrire sous forme d'ensembles d'éventualités les événements suivants :

A : « obtenir le même chiffre sur les deux dés »

B : « obtenir un tirage tel que la somme des deux dés soit égale à 6 »

C : « obtenir un tirage tel que la somme des deux dés soit paire »

D : « obtenir un tirage tel que la somme des deux dés soit impaire »

3. Calculer la probabilité notée $P(A)$ d'obtenir l'événement A. De même calculer $P(B)$, $P(C)$ et $P(D)$.

4. Calculer les probabilités suivantes : $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$, $P(\overline{A\cap B})$, $P(\overline{A\cup B})$, $P(A \cap C)$, $P(\overline{A\cap C})$, $P(A \cap D)$, $P(\overline{A\cap D})$, $P(C \cup D)$ et $P(C \cap D)$.

Réponses :

1. Ω = { (1 ;1) ; (1 ;2) ; (1 ;3); (1;4); (1;5); (1;6); (2;1); (2;2); (2;3); (2;4); (2;5); (2;6); (3;1); (3;2); (3;3); (3;4); (3;5); (3;6); (4;1); (4;2); (4;3); (4;4); (4;5); (4;6); (5;1); (5;2); (5;3); (5;4); (5;5); (5;6); (6;1); (6;2); (6;3); (6;4); (6;5); (6;6) }

2. A = { (1;1); (2;2); (3;3); (4;4); (5;5); (6;6) } ; B = { (1;5); (2;4); (3;3); (4;2); (5;1) } ; C = { (1 ;1) ; (1 ;3); (1;5); (2;2); (2;4); (2;6); (3;1); (3;3); (3;5); (4;2); (4;4); (4;6); (5;1); (5;3); (5;5); (6;2); (6;4); (6;6) } ;
D = { (1 ;2) ; (1 ;4); (1;6); (2;1); (2;3); (2;5); (3;2); (3;3); (3;5); (4;1); (4;3); (4;5); (5;2); (5;4); (5;6); (6;1); (6;3); (6;5) } ;

3. $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$; $P(B)=\frac{5}{36}$; $P(C)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$; $P(D)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$;

4. $P(A\cup B)=\frac{10}{36}$; $P(A\cap B)=\frac{1}{36}$; $P(\overline{A\cup B})=\frac{26}{36}$; $P(\overline{A\cap B})=\frac{35}{36}$; $P(A\cap C)=\frac{6}{36}$; $P(\overline{A\cap C})=\frac{30}{36}$;

$P(A\cap D)=\frac{0}{36}=0$; $P(\overline{A\cap D})=\frac{36}{36}=1$; $P(C\cup D)=\frac{36}{36}=1$; $P(C\cap D)=\frac{0}{36}=0$