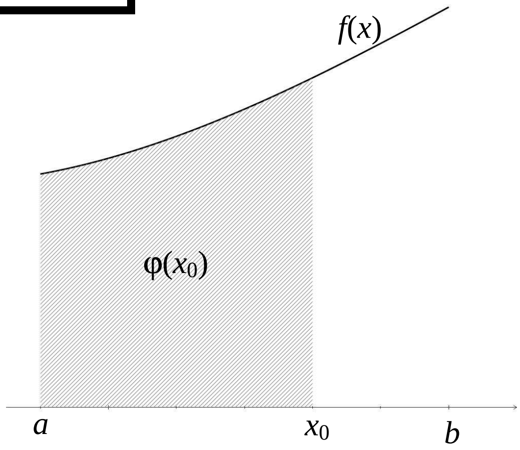
**Démonstration :** $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$

Soit $f$ une fonction définie et continue sur $[a;b]$. On supposera $f(x) \geqslant 0$ sur $[a;b]$.

Pour $x_0 \in [\,a\,;\,b\,]$, on peut calculer $\int_a^{x_0} f(x)dx$ ; c'est une fonction φ de $x_0$ telle que $\varphi(x_0) = \int_a^{x_0} f(x)dx$.




Etape 1 : On cherche si φ est dérivable :

Pour $h \approx 0$, $\dfrac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h} = \dfrac{\int_a^{x_0+h} f(x)dx - \int_a^{x_0} f(x)dx}{h} = \dfrac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$.

Comme $f$ est continue entre $x_0$ et $x_0 + h$, il existe $m(h)$ et $M(h)$ tel que, pour tout $x$ compris entre $x_0$ et $x_0 + h$, $m(h) \leqslant f(x) \leqslant M(h)$.

**Dans le cas ou $h > 0$** : $m(h) \leqslant f(x) \leqslant M(h)$ se traduit donc par : $\int_{x_0}^{x_0+h} m(h)dx \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} M(h)dx$

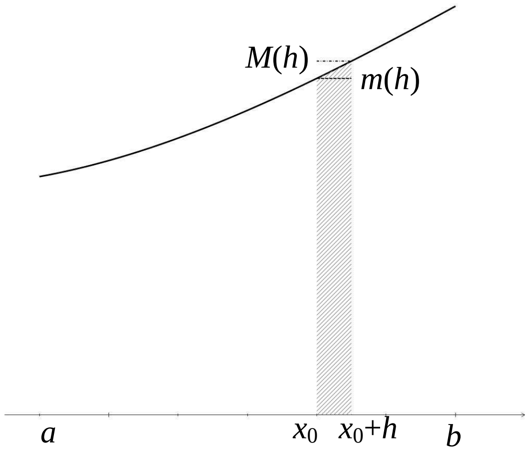
Etape 2 : Calcul de $\int_{x_0}^{x_0+h} m(h)dx$ et de $\int_{x_0}^{x_0+h} M(h)dx$

$\int_{x_0}^{x_0+h} m(h)dx = m(h) \times h$

( aire du rectangle de largeur $h$ et de hauteur $m(h)$ ).

$\int_{x_0}^{x_0+h} M(h)dx = M(h) \times h$

( aire du rectangle de largeur $h$ et de hauteur $M(h)$ ).




Etape 3 : Encadrements

$$\int_{x_0}^{x_0+h} m(x)dx \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} M(h)dx$$

$$m(h) \times h \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx \leqslant M(h) \times h$$

$$\frac{1}{h} \times m(h) \times h \leqslant \frac{1}{h} \times \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx \leqslant \frac{1}{h} \times M(h) \times h$$

$$m(h) \leqslant \frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h} \leqslant M(h)$$

$m(h)$ étant le minimum de $f(x)$ et $M(h)$ étant le maximum de $f(x)$ pour $x$ compris entre $x_0$ et $x_0 + h$, et comme $f$ est continue :

$$\lim_{h\to 0} m(h) = f(x_0) \text{ et } \lim_{h\to 0} M(h) = f(x_0)$$

D'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h} = f(x_0)$$

φ est donc dérivable en $x_0$ de nombre dérivé $f(x_0)$ d'où : $\boxed{\boldsymbol{\varphi'(x_0) : x_0 \mapsto f(x_0)}}$

En conclusion : La fonction φ définie par $x_0 \mapsto \int_a^{x_0} f(x)dx$ est dérivable de dérivée $f$. D'où :

**φ est une primitive de *f*** sur $[a;b]$.