

Exercices -correction

Exercice n°1 : Soit f la fonction définie sur $] -\infty, +\infty[$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 3$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. a. Montrer que, pour tout réel x , $f(x) = x^3 \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + 3x^2 - 12x + 3 \\ &= x^3 \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) \end{aligned}$$

b. Détermination de la limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{12}{x^2} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x^3} \right) = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) = 2 \quad \left. \right\} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

c. Détermination de la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{12}{x^2} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x^3} \right) = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) = 2 \quad \left. \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. Déterminer $f'(x)$.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

3. Etudier le signe de $f'(x)$.

La fonction $f'(x)$ est une fonction polynôme du second degré. Pour étudier le signe il faut donc trouver les éventuelles racines.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 6 \times (-12) = 36 + 288 = 324$$

Comme Δ est positif, le polynôme du second degré $6x^2 + 6x - 12$ admet deux racines x_1 et x_2 .

$$\begin{array}{lcl} \sqrt{\Delta} = \sqrt{324} & x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ = 18 & = \frac{-6 + 18}{2 \times 6} & = \frac{-6 - 18}{2 \times 6} \\ & = \frac{12}{12} & = \frac{-24}{12} \\ & = 1 & = -2 \end{array} \quad \text{ou}$$

Tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

↖ ↗
**signe de a à l'extérieur
des racines**

4. Donner le tableau de variation de f . Préciser les extremums de la fonction.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f		23		$+\infty$	
		$-\infty$	-4		

$$f(-2) = 3 \times (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 - 12 \times (-2) + 3$$

$$= 23$$

$$f(1) = 3 \times 1^3 + 3 \times 1^2 - 12 \times 1 + 3$$

$$= -4$$

La fonction f admet un maximum relatif égal à 23 atteint pour $x = -2$.

La fonction f admet un minimum relatif égal à -4 atteint pour $x = 1$.

5. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0,5.

La forme générale de l'équation d'une tangente au point d'abscisse $x=a$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Donc pour $a=0,5$, on calcule $f'(0,5)$ et $f(0,5)$:

$$f'(0,5) = 6 \times 0,5^2 + 6 \times 0,5 + 12$$

$$= -7,5$$

$$f(0,5) = 3 \times (0,5)^3 + 3 \times (0,5)^2 - 12 \times (0,5) + 3$$

$$= -2$$

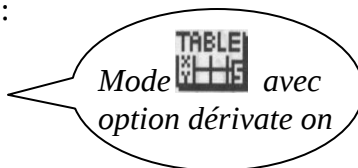
d'où :

$$y = -7,5(x - 0,5) - 2$$

$$= -7,5x + 3,75 - 2$$

$$= -7,5x + 1,75$$

$$= -\frac{15}{2}x + \frac{7}{4}$$



à calculer

L'équation de la tangente $\mathcal{C}$ est donc : $y = -\frac{15}{2}x + \frac{7}{4}$

6. Existe-il des points de $\mathcal{C}$ où la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à la droite d'équation $y = -12x + 5$.

« Deux droites sont parallèles si elles ont le même coefficient directeur ». Or, les différentes tangentes à la courbe $\mathcal{C}$ ont pour coefficient directeur le nombre dérivé $f'(x)$. Si l'on veut qu'une tangente à $\mathcal{C}$ soit parallèle à la droite d'équation $y = -12x + 5$, il faut donc que $f'(x) = -12$.

Pour trouver le (ou les) abscisses de ces points, il faut résoudre l'équation $f'(x) = -12$.

$$f'(x) = -12$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = -12$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 + 6x = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x = 0 \text{ ou } x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1$$

Comme $f'(0) = -12$ et $f'(-1) = -12$, il existe deux points d'abscisses respectives $x=0$ ou $x=-1$ pour lesquels les tangentes à $\mathcal{C}$ sont parallèles à la droite d'équation $y = -12x + 5$.

7. a. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $] -2 ; 1 [$.

« Ici, nous allons utiliser le théorème de la valeur intermédiaire (TVI). Il faut trois conditions pour l'appliquer ».

Comme sur $] -2 ; 1 [$,

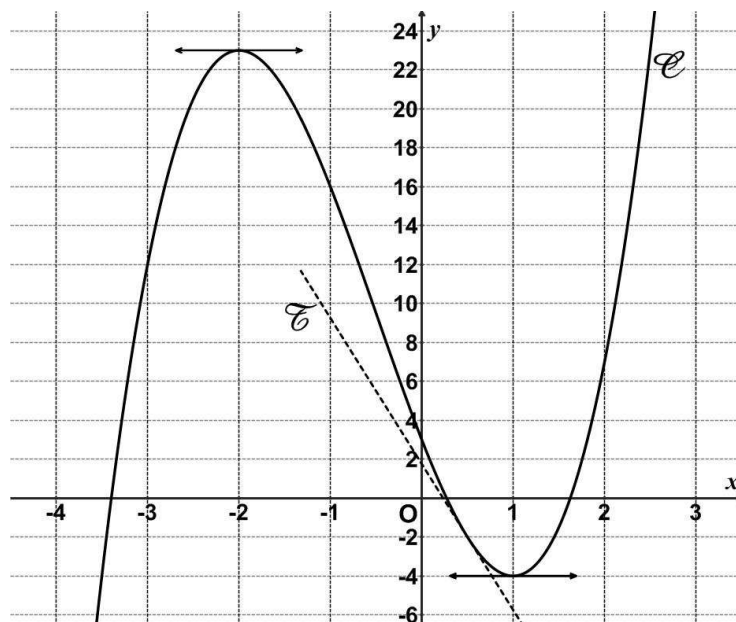
- la fonction f est dérivable ;
- strictement décroissante ;
- et comme $f(-2) > 0 > f(1)$

alors d'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α .

b. Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

À la calculatrice (mode Table), on trouve l'encadrement suivant $0,27 < \alpha < 0,28$

Graphique :



Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie sur $]2 ; +\infty[$ par $f(x) = 2x - 7 + \frac{1}{2x - 4}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 7) = -3 \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 4) = 0^+ \text{ d'ou } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{2x - 4} \right) = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 7) = +\infty \quad \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 4) = +\infty \text{ d'ou } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2x - 4} \right) = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3. Déterminer $f'(x)$.

Formule : $\left(\frac{1}{v} \right)' = -\frac{v'}{v^2}$ On pose $v = 2x - 4$; $v' = 2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 - \frac{2}{(2x - 4)^2} \\ &= \frac{2(2x - 4)^2}{(2x - 4)^2} - \frac{2}{(2x - 4)^2} \\ &= \frac{2(2x - 4)^2 - 2}{(2x - 4)^2} \\ &= \frac{2(4x^2 - 16x + 16) - 2}{(2x - 4)^2} \\ &= \frac{8x^2 - 32x + 32 - 2}{(2x - 4)^2} \\ &= \frac{8x^2 - 32x + 30}{(2x - 4)^2} \end{aligned}$$

4. Etudier le signe de $f'(x)$.

$8x^2 - 32x + 30$ est un polynôme du second degré. Pour étudier le signe il faut donc trouver les éventuelles racines.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-32)^2 - 4 \times 8 \times 30 = 64$$

Comme Δ est positif, le polynôme du second degré $8x^2 - 32x + 30$ admet deux racines x_1 et x_2 .

$$\begin{aligned}\sqrt{\Delta} &= \sqrt{64} \\ &= 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{32 + 8}{2 \times 8} \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{32 - 8}{2 \times 16} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Tableau de signe de $f'(x)$:

x	2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$8x^2 - 32x + 30$	-	0	+
$(2x - 4)^2$	+	+	+
$f'(x)$	-	0	+

5. Donner le tableau de variation de f . Préciser le(s) extremum(s) de la fonction.

x	2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	-1	$+\infty$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = -1$$

La fonction f admet un minimum égal à -1 atteint pour $x = 2,5$.

6. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3.

La forme générale de l'équation d'une tangente au point d'abscisse $x=a$ est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Donc pour $a=3$, on calcule $f'(3)$ et $f(3)$:

$$f'(3) = 1,5$$

$$f(3) = -0,5$$

d'où :

$$y = 1,5(x-3) - 0,5$$

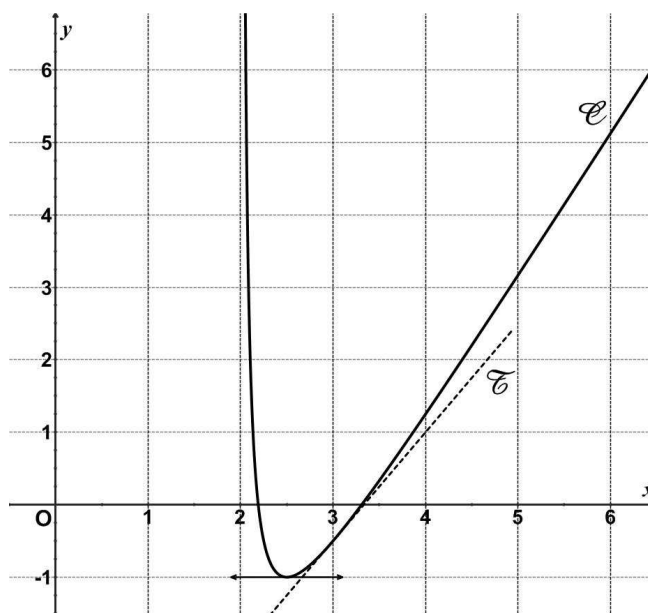
$$= 1,5x - 4,5 - 0,5$$

$$= \frac{3}{2}x - 5$$

Mode 
avec option
dérivée on

L'équation de la tangente $\mathcal{C}$ est donc : $y = \frac{3}{2}x - 5$

à calculer



Exercice n°3 :

Soit f la fonction définie sur $] -\infty; -0,5[$ par $f(x) = \frac{-2x+1}{2x^2-x-1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. a. Montrer que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{x\left(-2+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$ et que donc, $f(x) = \frac{-2+\frac{1}{x}}{x\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-2x+1}{2x^2-x-1} \\ &= \frac{x\left(-2+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} \\ &= \frac{-2+\frac{1}{x}}{x\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} \end{aligned}$$

b. Détermination de la limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{x^3}\right) = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 2 \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \right] = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0 \quad d'ou \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{1}{x}\right) = 2$$

2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -0,5} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -0,5} (-2x+1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -0,5} (2x^2-x-1) = 0^+ \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow -0,5} f(x) = +\infty$$

3. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f et montrer que, pour tout réel x de l'intervalle

$$]-\infty; -0,5[, \quad f'(x) = \frac{4x^2 - 4x + 3}{(2x^2 - x - 1)^2}$$

Formule : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ On pose : $u = -2x+1$ et $v = 2x^2 - x - 1$
 $u' = -2$ et $v' = 4x - 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2(2x^2 - x - 1) - (-2x+1)(4x-1)}{(2x^2 - x - 1)^2} \\ &= \frac{-4x^2 + 2x + 2 + 8x^2 - 2x - 4x + 1}{(2x^2 - x - 1)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 4x + 3}{(2x^2 - x - 1)^2} \end{aligned}$$

4. Etudier le signe de $f'(x)$.

$4x^2 - 4x + 3$ est un polynôme du second degré. Pour étudier le signe il faut donc trouver les éventuelles racines.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 3 = -32$. Comme Δ est négatif, le polynôme $4x^2 - 4x + 3$ admet aucune racine.

Tableau de signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$	$-0,5$
$4x^2 - 4x + 3$	+	
$(2x^2 - x - 1)^2$	+	
$f'(x)$	+	

5.

extremum(s) de la fonction.

Donner le tableau de variation de f . Préciser le(s)

x	$-\infty$	$-0,5$
$f'(x)$	+	
f	0	$+\infty$

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersections de $\mathcal{C}$ avec les axes de coordonnées.

Si ils existent les points ces points ont pour coordonnées $A(x_A; 0)$ et $B(0; y_B)$.

Comme f est fonction définie sur $] -\infty; -0,5 [$, le point B n'existe pas.

Pour éventuellement trouver les coordonnées du point A , il faut résoudre $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0$$

$$\frac{-2x+1}{2x^2-x-1} = 0$$

$$-2x+1=0 \quad \text{et} \quad 2x^2-x-1 \neq 0$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 2x^2-x-1 \neq 0$$

Ce calcul est toutefois inutile car pour tout réel $x \in]-\infty; -0,5[$, $f(x) > 0$

Sur l'intervalle $] -\infty;]-\infty; -0,5 [$, un tel point A n'existe pas

Il n'y a donc aucun point d'intersection entre $\mathcal{C}$ et les axes de coordonnées.

7. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ au point d'abscisse -1 .

La forme générale de l'équation d'une tangente au point d'abscisse $x=a$ est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Donc pour $a=-1$, on calcule $f'(-1)$ et $f(-1)$:

$$f'(-1) = 2,75$$

$$f(-1) = 1,5$$

d'où :

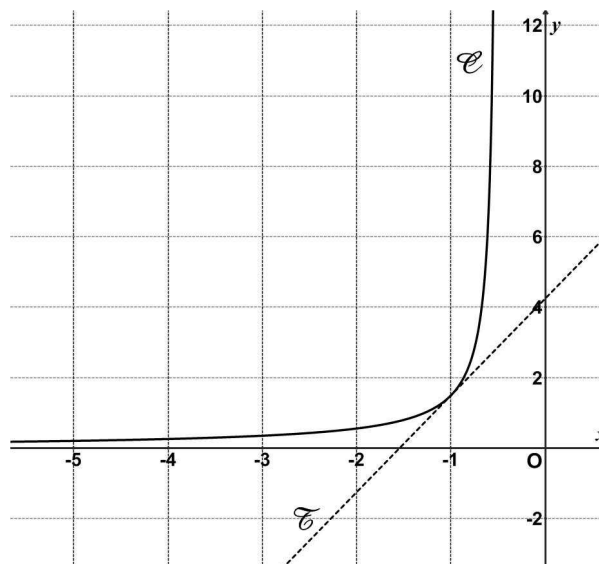
$$y = 2,75(x+1) + 1,5$$

$$= 2,75x + 2,75 + 1,5$$

$$= \frac{11}{4}x + \frac{17}{4}$$

Mode  avec option dérivée on

L'équation de la tangente $\mathcal{T}$ est donc : $y = \frac{11}{4}x + \frac{17}{4}$



Exercice n°4 :

Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble I sur lequel la fonction est définie.

a. $f(x) = \frac{2x^2 - 12x + 10}{x^2 - 9}$ sur $I =]3; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

b. $f(x) = -2x + 1 + \frac{x}{3x-1}$ sur $I = \left] -\infty; \frac{1}{3} \right[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} f(x) = -\infty$$

Exercice n°5 :

Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0. Donner une interprétation graphique de ce résultat.
« Donner une interprétation graphique revient à démontrer qu'il y a une asymptote et à donner son équation »
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.