

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A - Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction numérique définie pour tout réel x strictement positif, par :

$$g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x.$$

1. On nomme g' la fonction dérivée de la fonction g . Calculer $g'(x)$ pour tout réel x strictement positif.
2. a. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et donner le tableau des variations de la fonction g (les limites en 0 et en $+\infty$ ne sont pas demandées).
- b. Préciser la valeur exacte puis approchée à 10^{-1} près de $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire le signe de $g\left(\frac{1}{2}\right)$.
- c. Donner le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B - Étude d'une fonction et tracé de sa courbe représentative

Soit f la fonction numérique définie pour tout réel x strictement positif, par :

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{\ln x}{x}$$

On note C sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en 0. Donner une interprétation graphique de ce résultat (« Donner une interprétation graphique revient à dire si il y a une asymptote et à donner son équation »)
- b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$ puis montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ où g est la fonction définie dans la partie A.
- b. A l'aide de la réponse à la question Partie A 2c., donner le tableau des variations de la fonction f .
3. a. Démontrer que sur l'intervalle $]0; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α .
- b. à l'aide d'une calculatrice, donner la valeur approchée décimale de α arrondie à 10^{-2} .
- c. Préciser, dans un tableau, le signe de $f(x)$ pour x réel strictement positif.
4. a. On nomme D la droite d'équation $y = 2x + 1$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Montrer que la droite D est asymptote à la courbe C en $+\infty$.
- b. La droite D et la courbe C se coupent au point I . Déterminer les coordonnées du point I .
- c. Étudier la position relative de la courbe C et de la droite D (« c'est-à-dire précisez si la courbe C est située au dessus ou en dessous de la droite D ; cela vous est donné par l'étude du signe de "l'écart" trouvé à la question 4a. »)
5. Déterminer une équation de la droite T qui est tangente à la courbe C en son point d'abscisse 1.
6. Sur un même graphique (Annexe n°1), placer le point I , puis tracer T , D et C .

Partie C – Calcul d'aire

Soit F la fonction numérique définie pour tout réel x strictement positif, par :

$$F(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

1. On nomme F' la fonction dérivée de la fonction F . Calculer $F'(x)$ pour tout réel x strictement positif. Que représente alors la fonction f par rapport à la fonction F sur l'intervalle $]0; +\infty[$?

2. a. Sur votre copie, recopier et compléter le mot manquant de cette phrase : « Comme f est la fonction dérivée de la fonction F , on dit alors que la fonction F est une de la fonction f ».

b. Soit $\mathcal{S}$ la surface plane limitée par la courbe C , l'axe des abscisses, les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$. Colorier (si possible au crayon de couleur) cette surface $\mathcal{S}$ sur le graphique.

c. On note $\mathcal{A}$ l'aire de la surface $\mathcal{S}$ exprimée en unités d'aires. Pour calculer cette aire $\mathcal{A}$, on utilise une intégrale que l'on note: $\int_1^2 f(x)dx$ (et que l'on lit : intégrale de 1 à 2 de $f(x)dx$) ; d'où : $\mathcal{A} = \int_1^2 f(x)dx$

$\mathcal{A}$ est donnée, en unités d'aires, par le calcul suivant qui utilise la fonction F primitive de la fonction f :

$$\mathcal{A} = \int_1^2 f(x)dx = [F(x)]_1^2 = F(2) - F(1)$$

A l'aide de l'expression $F(x) = x^2 + x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$ de la primitive F de la fonction f , calculer $F(2)$ puis $F(1)$ à 10^{-2} près. En déduire alors $\mathcal{A} = F(2) - F(1)$ à 10^{-2} près qui est l'aire de la surface $\mathcal{S}$ exprimée en unité d'aires.

Annexe n°1 :

