

• Exercice n°1: (7 points)

1) Résoudre $z^2 - 4z + 6 = 0$ $\Delta = -8$. Les solutions sont $z_1 = 2 + i\sqrt{2}$ et $z_2 = 2 - i\sqrt{2}$ ou sous forme trigonométrique $z_1 = \sqrt{6} e^{i\pi/6}$ et $z_2 = \sqrt{6} e^{-i\pi/6}$

2) On remplace dans l'expression.

$$(3+2i)^2 - 4(3+2i) + 6 - 2i = 9 + 6i - 12 - 4i + 6 - 2i = 0$$

donc $3+2i$ est solution de l'équation $z^2 - 4z + 6 - 2i = 0$

$$(1-i)^2 - 4(1-i) + 6 - 2i = 1 - 2i - 4 + 4i + 6 - 2i = 0$$

donc $1-i$ est solution de l'équation $z^2 - 4z + 6 - 2i = 0$

4) Un quadrilatère est un rectangle si et seulement si ses diagonales sont de même longueur et ont même milieu.

Il faut donc calculer les longueurs AB et CD et les affixes des milieux de [AB] et [CD].

$$AB = |z_A - z_B| = |1-i - 3-i| = |-2-2i| = 2\sqrt{2} \quad CD = |z_C - z_D| = |2-i\sqrt{2} - 2+i\sqrt{2}| = |-2\sqrt{2}i| = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Affixe du milieu de [AB]} : \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{3+i-1-i}{2} = 1$$

$$\text{Affixe du milieu de [CD]} : \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{2-i\sqrt{2} + 2+i\sqrt{2}}{2} = 2$$

En conclusion on a démontré que DABC est un rectangle.

• Exercice n°2: (4 points)

$$1) b) f'(x) = \frac{(2x+a)(x^2+1) - (x^2+ax+b)x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{4x+ax^2+2a-2ax^2-bx}{(x^2+1)^2} = \frac{-ax^2+(4-b)x+2a}{(x^2+1)^2}$$

$$a) d) f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{2a}{1} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} ; f'(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{1+2+b}{3} = 2 \Leftrightarrow 3+b=6 \Leftrightarrow b=3$$

$$2) f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x^2+1} = \frac{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ La courbe représentative de la fonction admet en $+\infty$ ou en $-\infty$, la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

• Exercice n°3: (9 points)

$$1) f'(x) = \frac{(-3x^2+3)(x+1)^2 + (x^3-3x-6)(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)(-3x^2+3) + (x^3-3x-6)}{(x+1)^3} = \frac{-x^3-3x^2-3x-9}{(x+1)^3}$$

$$\text{Vérifions que } f'(x) = \frac{(-x-3)(x^2+3)}{(x+1)^3} : \frac{(-x-3)(x^2+3)}{(x+1)^3} = \frac{-x^3-3x^2-3x-9}{(x+1)^3} = f'(x)$$

2) Pour tout $x \in]-1; +\infty[$, $(x^2+3) > 0$ et $(x+1)^3 > 0$ et $(-x-3) < 0$ donc pour tout $x \in]-1; +\infty[$, $f'(x) < 0$

Tableau de variation:

x	-1	+
f'(x)	-	
f	+	+

$$3) f(1) = \frac{1(-1+\frac{3}{1}+\frac{6}{1})}{1^2(1+\frac{2}{1}+\frac{1}{1})} = \frac{-1+3+6}{1+2+1} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 1 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1} x^3 + 3x^2 + 6 = 10 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

$$4) T_1: y = f'(1)x + b \quad f'(1) = -2 \quad f(1) = 2 \text{ d'où } b = 4 \text{ d'où équation de } T_1: y = -2x + 4$$

5) Comme sur $[2; 3]$, la fonction f est dérivable, strictement décroissante, et comme $f(2) > 0 > f(3)$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α .

Par balayage à la calculatrice, on trouve: $2,35 < \alpha < 2,36$

6) Utiliser la calculatrice ou le logiciel "grapheasy" pour la réponse.