Nom :	DS 4	Classe : T^{er} STI	/20

Il sera éventuellement tenu compte de la présentation et de la rédaction

Exercice 1 : (7 points)

Soit i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1°) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :
$z^2 - 4z + 6 = 0$. On donnera les solutions sous la forme $a + ib$ et sous la forme $re^{i\,\theta}$ (avec les valeurs exactes pour a, b , r (r > 0) et une valeur approchée à 10^{-2} prés pour θ).

2°) Vérifier que les nombres complexes 3 + i et 1 – i sont des solutions de l'équation $z^2 - 4z + 4 - 2i = 0$.

3°) Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm) , les points A , B , C , D d'affixes respectives : $3+i$, $1-i$, $2+i\sqrt{2}$, $2-i\sqrt{2}$.

4°) Démontrer que le quadrilatère DACB est un rectangle.

Exercice 2 : (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2} \quad \text{où a et b sont deux réels}$$

On suppose que la courbe représentative de f passe par le point A (1 ; 2) et admette au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur 1 .

1°) a) Que vaut $f(1)$ et $f'(0)$?

b) Exprimer la fonction dérivée de f en fonction de a et de b .

c) En déduire les valeurs de a et de b.

2°) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ (justifier votre réponse).

Exercice 3 : (9 points)

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{-x^3 + 3x + 6}{(x+1)^2}$

1°) Calculer $f'(x)$ et vérifier que : $f'(x) = \dfrac{(-x-3)(x^2+3)}{(x+1)^3}$

2°) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]-1;+\infty[$ et dresser le tableau de variation .

3°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$. (justifier) Quelle conséquence graphique peut-on tirer ?

4°) Déterminer l'équation de la tangente T_1 au point d'abscisse 1.

5°) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α appartenant à l'intervalle $[2\ ;3]$.

En utilisant la calculatrice, donner un encadrement de α à 10^{-2} prés.

6°) Dans un repère orthogonal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ d'unité 1 cm, tracer la courbe représentative de f ainsi que la tangente T_1 .