

Partie A: (1,75pts) 1) 0,5 2a) 0,75 2b) 0,5

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$2) a) \frac{e^x}{x} (x \ln x + 1) = \frac{e^x}{x} \times x \ln x + \frac{e^x}{x} = e^x \ln x + \frac{e^x}{x} = f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x + 1) = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

b) Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, la courbe $\mathcal{C}$ admet pour asymptote la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x=0$ au point d'abscisse $x=0$.

Partie B: (3,25pts) 1a) 0,75 1b) 1 2a) 0,5 2b) 0,5 3) 0,5

$$1a) g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3} = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}. \text{ Donc pour tout réel strictement positif } x, g'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$$

b) Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $x^3 > 0$. Il faut maintenant étudier le signe du numérateur, c'est-à-dire le signe du polynôme du second degré: $x^2 - 2x + 2$. Calcul des éventuelles racines du polynôme $x^2 - 2x + 2$:

$\Delta = 4 - 8 = -4$. Comme le discriminant est négatif, le polynôme $x^2 - 2x + 2$ n'admet aucune racine réelle; on en déduit que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $x^2 - 2x + 2 > 0$. En conclusion, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g'(x) > 0$, donc la fonction g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

2a) $g(\frac{1}{2}) \approx -0,69$; $g(1) = 1$. Comme sur $[\frac{1}{2}; 1]$, g est dérivable, strictement croissante et comme $g(\frac{1}{2}) < 0 < g(1)$, alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .

b) Par balayage à la calculatrice on trouve: $0,59 < \alpha < 0,60$

3) Pour tout $x \in]0; \alpha[$, $g(x) < 0$ et pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie C: (4,25pts) 1a) 1 1b) 0,5 2a) 0,5 2b) 0,25 3a) 0,5 3b) 1,5

$$1a) f'(x) = e^x \ln x + \frac{e^x}{x} + \frac{e^x x - e^x}{x^2} = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2} \right) = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = e^x \left(\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = e^x g(x).$$

Donc pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = e^x g(x)$

b) Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $e^x > 0$. A l'aide de la réponse à la question 3) de la partie B, on peut conclure que pour tout $x \in]0; \alpha[$, $f'(x) < 0$ et pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

2a) Tableau de variation de f :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$		$+\infty$

$$b) f(0,6) \approx 2,1$$

3a) Mode TABLE: $Y1 = e^x \ln x + e^x \div x$

x	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5
$f(x)$	3,4	2,2	2,2	2,7	3,8	4,8	6,5	8,8	11,9	16,0

Partie D: (1,75pts) 1) 0,75 2a) 0,25 2b) 0,75

1) F est une primitive de f si et seulement si $F'(x) = f(x)$.

$$F'(x) = e^x \ln x + e^x \times \frac{1}{x} = f(x)$$

Donc sur l'intervalle $]0; +\infty[$, F est une primitive de f .

2) a) Voir graphique.

$$b) E = \int_1^2 f(x) dx = [F(x)]_1^2 = F(2) - F(1) = e^2 \ln 2 - e^1 \ln 1 = e^2 \ln 2 \text{ (u.a.)} = 4 \times e^2 \ln 2 \text{ cm}^2.$$

