

• Exercice n°1: (5 points)

1 a) $P(4) = 4^3 - 8 \times 4 - 32 = 64 - 32 - 32 = 0$

b) Résolution de l'équation $z^2 + 4z + 8 = 0$ dans $\mathbb{C}$: $\Delta = -16$: On trouve 2 solutions $z_1 = -2 + 2i$ et $z_2 = -2 - 2i$

c) Détermination des réels a, b et c :

$$P(z) = (z-4)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - 4az^2 - 4bz - 4c = az^3 + (b-4a)z^2 + (c-4b)z - 4c$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b-4a=0 \\ c=-8 \\ -4c=-32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4a \\ c=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ c=-8 \end{cases} \quad \text{En conclusion } P(z) = (z-4)(z^2 + 4z + 8)$$

d) L'ensemble S des solutions de l'équation $P(z)=0$ sont $S = \{4; -2+2i; -2-2i\}$

2) a) Non corrigé.

b) $|z_B| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \quad \text{d'où } z_B = [2\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}]$$

$|z_C| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4} \quad \text{d'où } z_C = [2\sqrt{2}; \frac{5\pi}{4}]$$

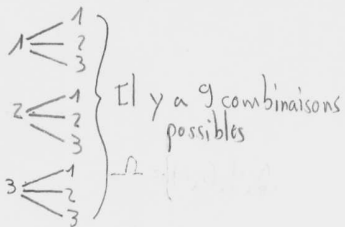
c) $\widehat{BOC} = 2\pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. De plus $OB = OC = 2\sqrt{2}$. Le triangle OBC est un triangle rectangle isocèle en O .

3) a) $z_A - z_B = 4 - \frac{-2}{3} = \frac{10}{3}$; $|z_A - z_B| = |\frac{10}{3}| = \frac{10}{3}$; $z_B - z_C = \frac{-2+2i}{3} - \frac{-2-2i}{3} = \frac{-8+4i}{3}$; $|z_B - z_C| = \sqrt{(\frac{-8}{3})^2 + (\frac{4}{3})^2} = \frac{10}{3}$

b) Comme $|z_A - z_B| = |z_B - z_C| = |z_C - z_A|$, z est le centre de gravité du triangle ABC .

• Exercice n°2: (4 points)

1. A l'aide d'un arbre: $\Omega = \{(1;1); (1;2); (1;3); (2;1); (2;2); (2;3); (3;1); (3;2); (3;3)\}$ | 2 a) Il y a équiprobabilité:



b) Comme $P(A) + P(C) \neq 1$, les événements A et C ne sont pas contraires.

3) a) L'ensemble des valeurs prises par X est: $\{20; 30; 40\}$.

b) $P(X=20) = \frac{4}{9}$

c) La loi de probabilité est donnée par le tableau suivant:

Valeurs x_i prises par X	20	30	40
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

d) $E(X) = 20 \times \frac{4}{9} + 30 \times \frac{4}{9} + 40 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9}(80 + 120 + 40) = \frac{240}{9} = \frac{80}{3} \approx 26,67$

• Problème : 10 points.

1) $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $x > 0$, $x+1 > 0$. Pour tout $x \in]0; 1[$, $x-1 < 0$ d'où $g'(x) < 0$ donc la fonction g est décroissante et pour tout $x \in]1; +\infty[$, $g'(x) > 0$ donc la fonction g est croissante.

Tableau de variation :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
g		$\nearrow$	$\nearrow$

2) $g(1) = 1^2 + 2 - 2 \ln 1 = 3$. La fonction g admet un minimum égal à 3 atteint pour $x=1$; on peut conclure que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g(x)$ est positif.

3) 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$; d'où $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = 0$; d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2) a) Etude de la limite de $f(x) - (\frac{x}{2} + 2)$ en $+\infty$:

$f(x) - (\frac{x}{2} + 2) = \frac{\ln x}{x}$; Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, la courbe $\mathcal{C}$ représentative admet la droite D comme asymptote en $+\infty$

b) Etude du signe de $f(x) - (\frac{x}{2} + 2) = \frac{\ln x}{x}$:

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $x > 0$. Pour tout $x \in]0; 1[$, $\ln x < 0$ et pour tout $x \in]1; +\infty[$, $\ln x > 0$.

En conclusion, pour tout $x \in]0; 1[$, $\ln x < 0$ donc la courbe $\mathcal{C}$ est située strictement au dessous de la droite D et pour tout $x \in]1; +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}$ est située strictement au dessus de D .

3) a) $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \ln x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - 2 \ln x}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $2x^2 > 0$ et $g(x) > 0$ (voir partie 1) donc pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante.

c) Tableau de variation de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

b) a) Equation de (Δ) :

$f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{1 - \ln 1}{1^2} = \frac{3}{2}$, $f(1) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$; $\frac{5}{2} = \frac{3}{2} \times 1 + b$ d'où $b = 1$

L'équation de (Δ) est : $y = \frac{3}{2}x + 1$

b) Il faut résoudre $f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \ln x = 0$ et $x^2 \neq 0 \Leftrightarrow \ln x = 1$ et $x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x = e$ et $x \neq 0$

$f(e) = \frac{e}{2} + 2 + \frac{\ln e}{e} = \frac{e}{2} + 2 + \frac{1}{e}$. Les coordonnées du point B sont $B(e; \frac{e}{2} + 2 + \frac{1}{e})$

5) Non corrigé :

6) a) Détermination de la primitive de $k(x)$:

$k(x) = \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$. Une primitive de k est $K(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$

b) $A(t) = \int_1^t [f(x) - (\frac{x}{2} + 2)] dx = \int_1^t \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2 \right]_1^t = \frac{1}{2}(\ln t)^2 - \frac{1}{2} \ln^2 1 = \frac{1}{2}(\ln t)^2$ u.a. $= 2(\ln t)^2 \text{ cm}^2$

c) Il faut résoudre $A(t) = 100 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow 2(\ln t)^2 = 100 \Leftrightarrow (\ln t)^2 = 50 \Leftrightarrow \ln t = \sqrt{50} \Leftrightarrow t = e^{\sqrt{50}}$