

Correction DS8:

Exercice n°1: 7 points

1) $y' - \frac{1}{2}y = 0$. La solution générale de l'équation différentielle est $y(x) = C e^{\frac{1}{2}x}$ ou c'est une constante réelle.

2) $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}x$; $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}$

$f'(x) - \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x(e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}x = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

Comme $f'(x) - \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$, f est bien solution de l'équation (E)

3) $H'(x) = e^{\frac{1}{2}x}(x-2) + 2e^{\frac{1}{2}x} \times 1 = x e^{\frac{1}{2}x} - 2e^{\frac{1}{2}x} + 2e^{\frac{1}{2}x} = x e^{\frac{1}{2}x} = h(x)$

Comme $H'(x) = h(x)$, H est bien une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

b) $V = \pi \int_0^2 [f(x)]^2 dx$. Calcul de $[f(x)]^2$: $[f(x)]^2 = (e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}x)^2 = e^x - x e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}x^2$

$V = \pi \int_0^2 (e^x - x e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}x^2) dx = \pi [e^x - 2e^{\frac{1}{2}x}(x-2) + \frac{1}{12}x^3]_0^2 = [(e^2 - 2e^1 \times 0 + \frac{1}{12} \times 8) - (e^0 - 2e^0(-2) + \frac{1}{12} \times 0)] \times \pi$

$= \pi(e^2 + \frac{3}{4} - 1 - 4) = \pi(e^2 + \frac{3}{4} - \frac{15}{4}) = \pi e^2 - \frac{13}{3}\pi$. La valeur exacte en unité de volume de V est $\pi e^2 - \frac{13}{3}\pi$ u.v.

Exercice n°2: 10 points

1)

	Nombre de pièces produites par M ₁	Nombre de pièces produites par M ₂	Total
Nombre de pièces défectueuses	40	8	48
Nombre de pièces non défectueuses	760	192	952
Total	800	200	1 000

2) Il y a équiprobabilité donc:

a) $P(A) = \frac{800}{1000} = 0,8$

b) $P(B) = \frac{48}{1000} = 0,048$

c) $P(C) = \frac{760}{800} = 0,95$

3) a) La variable aléatoire X peut prendre les trois valeurs suivantes: 38, 42,3 et 42,5

b) La loi de probabilité est donnée par le tableau suivant:

x_i	38	42,3	42,5
$P(x=x_i)$	0,952	0,04	0,008

$P(X=38) = \frac{952}{1000} = 0,952$

$P(X=42,3) = \frac{40}{1000} = 0,04$

$P(X=42,5) = \frac{8}{1000} = 0,008$

c) Calcul de $E(X)$:

$E(X) = 38 \times 0,952 + 42,3 \times 0,04 + 42,5 \times 0,008 = 38,208$. L'espérance mathématique $E(X) = 38,208$.

d) Le prix doit être de 38,21 €, prix minimal de vente pour que l'atelier ne vende pas à perte.

e) Calcul de l'écart type:

$V(X) = 0,952 \times 38^2 + 0,04 \times 42,3^2 + 0,008 \times 42,5^2 - (38,208)^2 \approx 0,858$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 0,927$

Exercice n°3: 3 points

1) $y'' - 4y = 0 \Leftrightarrow y'' + 4y = 0$ (E)

La solution générale de l'équation différentielle (E) est $f(t) = A \cos 2t + B \sin 2t$

2) Recherche de la solution particulière:

$f(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A \cos 0 + B \sin 0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$

$f'(t) = -2A \sin 2t + 2B \cos 2t$

$f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -2A \sin \frac{\pi}{3} + 2B \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -\sin \frac{\pi}{3} + 2B \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} + 2B \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow B = \sqrt{3}$

La solution particulière recherchée de (E) est $f(t) = \frac{1}{2} \cos 2t + \sqrt{3} \sin 2t$