

Partie A: (2 points)

Identification: $\begin{cases} 2 = a(\ln 1)^2 + b \ln 1 + c \\ 0 = a(\ln e)^2 + b \ln e + c \\ 2 = a(\ln e^3)^2 + b \ln e^3 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a + b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ 3a + 3b + 6 = 0 \\ 9a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$

Partie B: (13 points)

1) a) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} -3 \ln x = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

1) b) $\ln x (\ln x - 3) + 2 = (\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = f(x)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 3) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2) a) Calcul de $f'(x)$: $f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x - 3 \times \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x - 3}{x}$. Donc pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x}$

2) b) Etude du signe de $f'(x)$: Pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, $x > 0$.

Etude du signe de $2 \ln x - 3$: $2 \ln x - 3 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x > e^{\frac{3}{2}}$

En conclusion, pour tout $x \in]0; e^{\frac{3}{2}}[$, $f'(x) < 0$ et pour tout $x \in]e^{\frac{3}{2}}; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

3) c) Tableau de variation de f :

x	0	$e^{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

3) a) $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=2$

L'ensemble S des solutions de l'équation est $S = \{1; 2\}$

b) En posant $X = \ln x$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow (\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0$

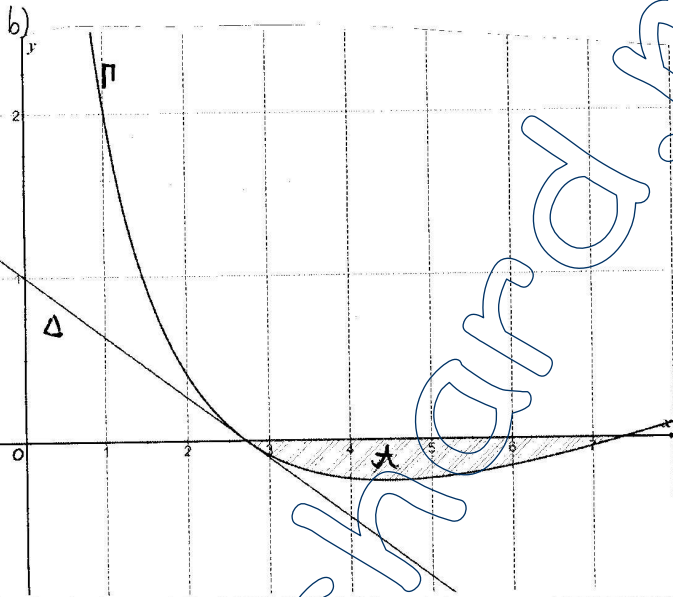
On en déduit les solutions suivantes: $x = e$ ou $x = e^2$

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont e et e^2 .

c) En conclusion, pour tout $x \in]0; e[\cup]e^2; +\infty[$, $f(x) > 0$ et pour tout $x \in]e; e^2[$, $f(x) < 0$.

4) a) Equation de Δ :

1) $f'(e) = \frac{2 \ln e - 3}{e} = -\frac{1}{e}$; $f(e) = 0$ $0 = -\frac{1}{e}x + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{e}$ Equation de Δ : $y = -\frac{1}{e}x + \frac{1}{e}$



Partie C: (5 points)

1) Soit G , la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par:

2) $G(x) = x(\ln x)^2 - 5x \ln x + 5x$

$G'(x) = (\ln x)^2 \times 1 + x \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x - 5 \ln x - 5x \times \frac{1}{x} + 5$
 $= (\ln x)^2 + 2 \ln x - 5 \ln x - 5 + 5$
 $= (\ln x)^2 - 3 \ln x$

Comme $G'(x) = (\ln x)^2 - 3 \ln x$, G est une primitive de la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $x \mapsto (\ln x)^2 - 3 \ln x$.

2) $F(x) = x(\ln x)^2 - 5x \ln x + 7x + C$ (avec $C \in \mathbb{R}$)

$F(1) = 0 \Leftrightarrow 7 + C = 0$ d'où $C = -7$

En conclusion: $F(x) = x(\ln x)^2 - 5x \ln x + 7x - 7$

3) Voir Figure. 9,5

3) b) $A = - \int_e^{e^2} f(x) dx = - \left[x(\ln x)^2 - 5x \ln x + 7x \right]_e^{e^2} = - [F(e^2) - F(e)]$

1) $F(e^2) = e^2 \times 4 - 5e^2 \times 2 + 7e^2 = e^2$ d'où $A = -[e^2 - 3e] = 3e - e^2$ u.a. $\approx 12e - 4e^2 \text{ cm}^2$

$F(e) = e - 5e + 7e = 3e$

$\approx \underline{\underline{3,06 \text{ cm}^2}}$