<u>Ds n°9</u> :
Génie mécanique - France Septembre 2003

PROBLÈME **11 points**

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A : Recherche d'une fonction

Soit g une fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = a(\ln x)^2 + b\ln x + c,$$

où a, b et c sont trois réels.

Déterminer a, b et c sachant que sa courbe représentative dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ passe par les points A(1 ; 2), B (e ; 0) et C$\left(e^3 ; 2\right)$.

Partie B : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^2 - 3\ln x + 2.$$

1. **a.** Calculer la limite de f en 0.

   b. Calculer la limite de f en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout x de $]0 ; +\infty[$, on a :

   $$f(x) = \ln x(\ln x - 3) + 2.$$

2. **a.** Montrer que :

   $$f'(x)\frac{2\ln x - 3}{x}.$$

   où f' désigne la fonction dérivée de f.

   b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

   c. Dresser le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$.

3. **a.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue X :

   $$X^2 - 3X + 2 = 0.$$

   b. En déduire les solutions exactes dans $]0 ; +\infty[$ de l'équation : $f(x) = 0$.

   c. Déduire, des questions **2.c.** et **3.b.**, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

4. On note Γ la courbe représentative de f dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

   a. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point d'abscisse e.

   b. Tracer la courbe Γ et la tangente Δ.

Partie C : Primitive et calcul d'aire

1. Montrer que la fonction, définie sur $]0 ; +\infty[$, par :

   $$x \longmapsto x(\ln x)^2 - 5x\ln x + 5x,$$

   est une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto (\ln x)^2 - 3\ln x$.

2. En déduire la primitive F de f sur $]0 ; +\infty[$ qui s'annule pour $x = 1$.

3. **a.** Hachurer la partie du plan délimitée par la courbe Γ, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = e$ et $x = e^2$.

   b. Calculer, en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie hachurée. On en donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} prés.