

• Exercice n°1: 3 points

a) $\lim_{x \rightarrow -2} 4x-1 = -9$; $\lim_{x \rightarrow -2} 2x = -4$ et $\lim_{x \rightarrow -2} 3x+6 = 0^+$ d'où $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x}{3x+6} = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x-1 = +\infty$; $\frac{2x}{3x+6} = \frac{2}{3+\frac{6}{x}}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3+\frac{6}{x}} = \frac{2}{3}$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3+\frac{6}{x}} = \frac{2}{3}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} 2x = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 1} x^2-1 = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

$\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{1-\frac{1}{x^2}}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1-\frac{1}{x^2} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

• Problème: 17 points

1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2}x-4 = -\frac{7}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 1} x-1 = 0^+$ d'où $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x-1} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$

2) Comme $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$, la courbe $\mathcal{C}$ admet au point d'abscisse 1 une asymptote d'équation $x=1$.

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x-4 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x-1 = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-1} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

4) $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2-4}{2(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{2(x-1)^2}$

4) Etude du signe de $f'(x)$:

Pour tout réel $x \in]1; +\infty[$, $2(x-1)^2 > 0$.

Etude du signe de x^2-2x-3 : $\Delta = 16$ $\sqrt{\Delta} = 4$ $x_1 = 3$ et $x_2 = -1$

3) Pour tout réel $x \in]1; 3[$, $x^2-2x-3 < 0$ donc $f'(x) < 0$ et pour tout $x \in]3; +\infty[$, $f'(x) > 0$.

Tableau de variation de f :

x	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
f	$+\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$

5) Etude de la limite de $f(x) - (\frac{1}{2}x-4)$ en $+\infty$:

1) $f(x) - (\frac{1}{2}x-4) = \frac{2}{x-1}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-1} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-1} = 0$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\frac{1}{2}x-4)] = 0$ alors la courbe $\mathcal{C}$ admet comme asymptote en $+\infty$ la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \frac{1}{2}x-4$

6) Etude du signe de $f(x) - (\frac{1}{2}x-4)$:

1) Pour tout réel $x \in]1; +\infty[$, $\frac{2}{x-1} > 0$ donc la courbe $\mathcal{C}$ est située au-dessus de la droite $\mathcal{D}$.

7) Equation de $\mathcal{C}$:

1) $f'(2) = -\frac{3}{2}$ $f(2) = -1$ $y = -\frac{3}{2}(x-2) - 1$ d'où $y = -\frac{3}{2}x + 2$

8) a) $f(7) \approx -0,167$ $f(8) \approx 0,286$

15) Comme sur $[7; 8]$, la fonction f est dérivable, strictement croissante et comme $f(7) < 0 < f(8)$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α . b) $7,372 < \alpha < 7,373$

10) Il faut résoudre $f'(x) = -\frac{1}{2}$

1) $\frac{1}{2} - \frac{2}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{2}{(x-1)^2} = -1 \Leftrightarrow -(x-1)^2 = -2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow x-1 = \sqrt{2}$ ou $x-1 = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 1+\sqrt{2}$ ou $x = 1-\sqrt{2}$

L'abscisse du point A est $1+\sqrt{2}$

11) Il faut résoudre: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$:

$$1 \quad \frac{1}{2}x - 4 + \frac{2}{x-1} = -\frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} = -x + 5 \Leftrightarrow (x-1)(-x+5) = 2 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = 3 - \sqrt{2}$$

Les abscisses des points B et C sont

12) Il faut résoudre $f'(x) = \frac{1}{2}$:

$$1 \quad \frac{1}{2} - \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{-2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow -2 = 0 \text{ et } (x-1)^2 \neq 0 \rightarrow \text{Aucune solution, donc il n'existe aucun point.}$$

9) Courbe:

