**CORRECTION** **BACCALAUREAT BLANC** **JEUDI 11 MARS 2010**

## <u>EXERCICE 1</u> **5 points**

0,25 **1.** **a.** $P(3) = 3^3 - 7 \times 3^2 + 20 \times 3 - 24 = 27 - 63 + 60 - 24 = 87 - 87 = 0.$

**b.** On a donc $P(z) = z^3 - 7z^2 + 20z - 24 = (z-3)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right) = z^3 - \alpha z^2 + \beta z - 3z^2 - 3\alpha z - 3\beta = z^3 - (\alpha+3)z^2 + (\beta - 3\alpha)z - 3\beta.$

En identifiant, on obtient :

1

$$\left\{\begin{array}{lcl} -7 & = & \alpha - 3 \\ 20 & = & \beta - 3\alpha \\ -24 & = & -3\beta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} -4 & = & \alpha \\ 20 & = & \beta - 3\alpha \\ 8 & = & 8\beta \end{array}\right.$$

Donc $P(z) = (z-3)\left(z^2 - 4z + 8\right)$.

**c.** Il en résulte que $P(z) = 0 \iff \left|\begin{array}{lcl} z-3 & = & 0 \\ z^2 - 4z + 8 & = & 0 \end{array}\right.$

0,75 Résolution de l'équation du second degré :

$z^2 - 4z + 8 = 0 \iff (z-2)^2 - 4 + 8 = 0 \iff (z-2)^2 + 4 = 0 \iff (z-2)^2 - (2\mathrm{i})^2 = 0 \iff (z - 2 - 2\mathrm{i})(z - 2 + 2\mathrm{i}) = 0.$

Finalement : $S = \{3 ; 2 + 2\mathrm{i} ; 2 - 2\mathrm{i}\}$.

0,25 **2.** **a.** Voir la figure.

**b.** On a $|b|^2 = 4 + 4 = 4 \times 2 \Rightarrow |b| = 2\sqrt{2}$.

0,25 On peut écrire $b = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right).$

Un argument de $b$ est donc $\dfrac{\pi}{4}$.

0,25 **c.** $c$ étant le conjugué de $b$, $|c| = 2\sqrt{2}$ et un argument de $c$ est $-\dfrac{\pi}{4}$.

**d.** $|b| = \mathrm{OB} = |c| = \mathrm{OC}$ : le triangle OBC est donc isocèle en O.

1 De plus $\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}.$

Le triangle isocèle OBC est rectangle en O.

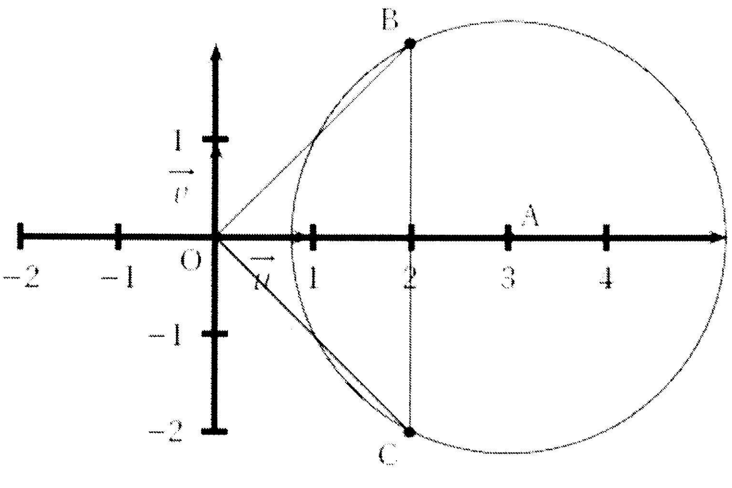
**3.** **a.** $|b-3|^2 = |-1 + 2\mathrm{i}|^2 = 1 + 4 = 5$, donc $|b - 3| = \sqrt{5}$ ;

0,75 De même $|c-3|^2 = |-1 - 2\mathrm{i}|^2 = 1 + 4 = 5$, donc $|c-3| = \sqrt{5}$.

Conclusion B et C appartiennent à $\mathscr{E}$.

0,5 **b.** On a pour un point $M$ d'affixe $z$, $|z - 3| = \sqrt{5} \iff AM = \sqrt{5}$.

L'ensemble $\mathscr{E}$ est donc le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{5}$.



• Exercice n°2 : 5 points

0,25 1. $f(0)=0$ ; $f(2)=\ln 2$ ; $f'(2)=0$

0,5 2. $f'(x)=\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{4-x}$

1 3. $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(2)=\ln 2 \\ f'(2)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a\ln 2+b\ln 4+c\ln 2=0 \\ a\ln 4+b\ln 2+c\ln 2=\ln 2 \\ \dfrac{a}{4}-\dfrac{b}{2}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a\ln 2+2b\ln 2+c\ln 2=0 \\ 2a\ln 2+b\ln 2+c\ln 2=\ln 2 \\ a-2b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a+2b+c=0 \\ 2a+b+c=1 \\ a-2b=0 \end{cases}$

1 4. $\begin{cases} a+2b+c=0 \\ 2a+b+c=1 \\ a-2b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a+c=0 \\ 2a+b+c=1 \\ a-2b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a+c=0 \\ b=1 \\ a-2b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a+c=0 \\ b=1 \\ a=2 \end{cases} \iff \begin{cases} c=-4 \\ b=1 \\ a=2 \end{cases}$  $S=\{(2;1;-4)\}$

1 5. a) $f(x)=0$

$2\ln(x+2)+\ln(4-x)-4\ln 2=0$

$\ln(x+2)^2+\ln(4-x)-4\ln 2=0$

$\ln[(x+2)^2\times(4-x)]=\ln 2^4$

$(x+2)^2\times(4-x)=16$

$(x^2+4x+4)(4-x)=16$

$4x^2-x^3+16x-4x^2+16-4x=16$

$-x^3+12x=0$

$x(12-x^2)=0$

$x=0$ ou $12-x^2=0$

$x=0$ ou $x^2=12$

$x=0$ ou $x=2\sqrt{3}$ ou $x=-2\sqrt{3}$

On ne peut pas garder la solution $-2\sqrt{3}$ donc $S=\{0;2\sqrt{3}\}$

1,25 b) Étude du signe de $f'(x)$ :

$f'(x)=\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{4-x}=\dfrac{2(4-x)-(x+2)}{(x+2)(4-x)}=\dfrac{-3x+6}{(x+2)(4-x)}$

Tableau de signe de $f'(x)$ :

| $x$ | $-2$ | | $2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | | $+$ | | $+$ | |
| $4-x$ | | $+$ | | $+$ | |
| $-3x+6$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | | $-$ | |

Pour tout réel $x\in]-2;2[$ $f'(x)>0$ et pour tout réel $x\in]2;4[$, $f'(x)<0$.

Tableau de variation de $f$ :

| $x$ | $-2$ | | $2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | $\ln 2$ | $\searrow$ | |

**PROBLÈME** 10 points

**PARTIE A : Étude de la fonction $f$**

1. a. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$, donc puisque $e^{2x}=(e^x)^2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}=0$.

0,75 Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$.

Ceci montre que la droite $D$ d'équation $y=4$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de moins l'infini.

0,5 b. On a vu que $e^{2x}=(e^x)^2$, donc en factorisant $e^x$ dans les deux premiers termes :

$$f(x)=e^x(e^x-5)+4.$$

0,75 2. a. $f$ est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2e^x\times e^x-5e^x$. En factorisant $e^x$, $f'(x)=e^x(2e^x-5)$.

0,5 b. $2e^x-5=0 \iff e^x=\dfrac{5}{2} \iff x=\ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

0,25 $2e^x-5>0 \iff e^x>\dfrac{5}{2} \iff x>\ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$

0,5 c. La question précédente montre que pour $x>\ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$, $f'(x)>0$, donc $f$ est croissante.

De même pour $x<\ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$, $f'(x)<0$, donc $f$ est décroissante.

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln\frac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $4$ | $\searrow$ | $-\frac{9}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3. Il résulte de la question précédente que $f$ a un minimum pour $x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$ qui vaut, sachant que $e^x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$, $f\left[\ln\left(\frac{5}{2}\right)\right] = \left[\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-5\right)\right] = -\frac{25}{4}+4 = -\frac{9}{4}$.

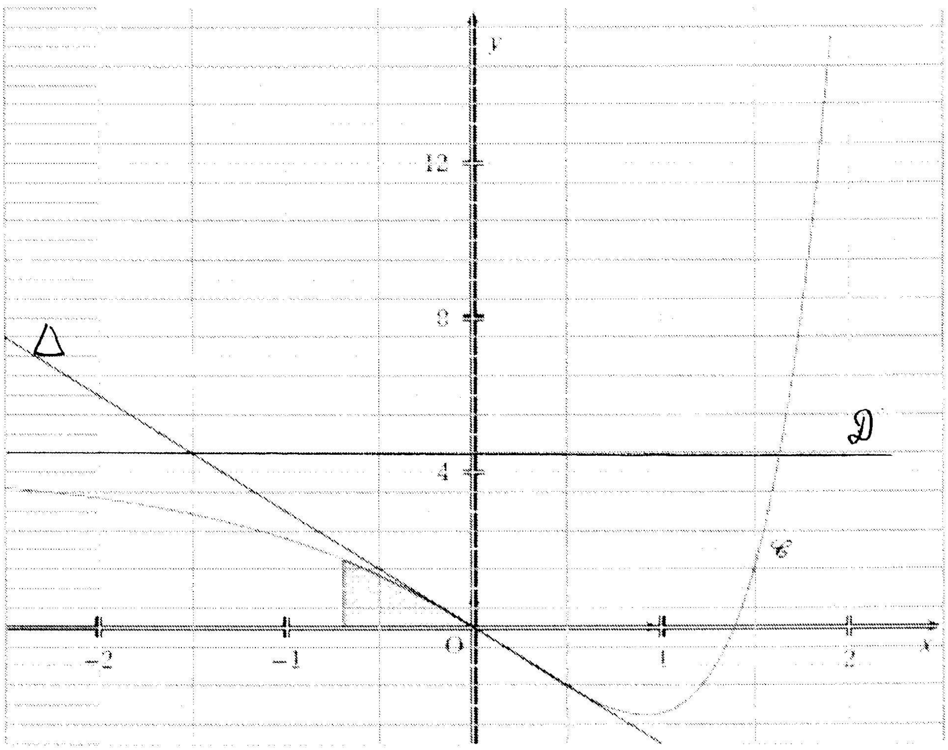
1 Or $f(1) = e^2 - 5e + 4 \approx -2,2 < 0$ et $f(2) = e^4 - 5e + 4 \approx 21,7 > 0$.
Dans l'intervalle $[1\ ;\ 2]$, la fonction $f$ dérivable est croissante et ses valeurs appartienent à l'intervalle $[f(1)\ ;\ f(2)]$ qui contient 0.
Il existe donc un réel unique $\alpha \in [1\ ;\ 2]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
La calculatrice donne $\alpha \approx 1,39$.

0,25 4. a. On a $f(0) = 1^2 - 5 + 4 = 0$, donc O appartient à $\mathscr{C}$

0,75 b. Le coefficient directeur de la tangente $\Delta$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point O est le nombre $f'(0)$.
$f'(x) = e^x(2e^x - 5) \Rightarrow f'(0) = 1 \times (2-5) = -3$. . L'équation de $\Delta$ est $y = -3x$

5.

1,75




6. $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$. On pose $X = e^x$ ; L'équation devient $X^2 - 5X + 4 = 0$. Les solutions sont $X = 4$ ou $X = 1$
D'où $e^x = 4$ ou $e^x = 1$ donc $x = \ln 4$ ou $x = 0$
$S = \{0 ; \ln 4\}$

1

## Partie B

0,25 1. +Sur l'intervalle $\left[\ln\frac{1}{2}\ ;\ 0\right]$ on a vu que $f(x) \geqslant f(0)$ car $f$ est décroissante ; or $f(0) = 0$ **:** la fonction est donc positive sur cet intervalle.

0,5 2. Une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ est $F$ telle que :
$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 5e^x + 4x$

0,25 3a. Cf. figure

3.b. On a vu que sur $\left[\ln\frac{1}{2}\ ;\ 0\right]$, $f(x) \geqslant 0$. Donc l'aire $\mathscr{A}$ en unités d'aire de la surface du domaine $\mathscr{D}$ est égale à l'intégrale

$$\mathscr{A} = \int_{\ln\frac{1}{2}}^{0} f(x)\,dx = [F(x)]_{\ln\frac{1}{2}}^{0} = F(0) - F\left(\ln\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 5 - \left(\frac{1}{2}e^{2\ln\frac{1}{2}} - 5e^{\ln\frac{1}{2}} + 4\ln\frac{1}{2}\right) =$$

$$-\frac{9}{2} - \left(\frac{1}{8} - \frac{5}{2} - 4\ln 2\right) = -\frac{19}{8} + 4\ln 2. \left(\text{car } e^{2\ln\frac{1}{2}} = e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}\right)$$

Or une unité d'aire est égale à $4 \times 1 = 4\ \text{cm}^2$.

$$\mathscr{A} = 4\left(-\frac{19}{8} - 4\ln 2\right) = -\frac{19}{2} + 16\ln 2\ \text{cm}^2.$$

La calculatrice donne : $\mathscr{A} \approx 2,590 \approx 2,59\ \text{cm}^2$.