Correction DS n°8 – TSTI 18/05/10

• Exercice n°1 : 10 points

1,5 **1.** (E) est une équation différentielle de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$, avec $\omega = \frac{1}{2}$. Les solutions de cette équation sont donc de la forme :

$$y = A\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{1}{2}x\right).$$

1 **2. a.** Comme $\mathscr{C}_f$ passe par le point A, on en déduit que $f(0) = 1$. Comme la tangente à la courbe admet pour pente $\frac{1}{2}$, on en déduit que $f'(0) = \frac{1}{2}$.

2 **b.** $f(0) = 1$ entraine que $A\cos(0) + B\sin(0) = 1$ soit $A = 1$.
$f'(x) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{B}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$.
Comme $f'(0) = \frac{1}{2}$ que $A\sin(0) + \frac{B}{2}\cos(0) = \frac{1}{2}$. Donc $B =$ 1
On en déduit que $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.

0,5 **3.** Voir la figure 1.

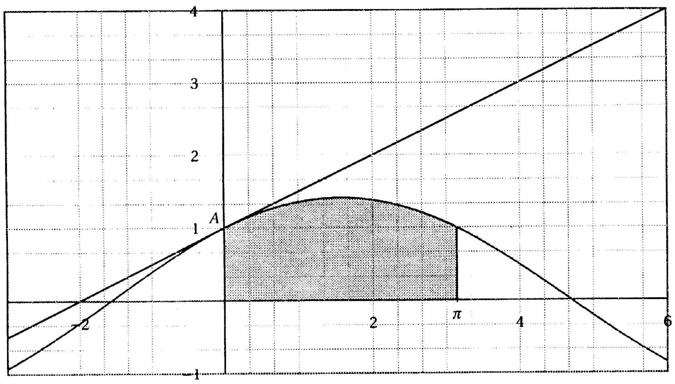


FIGURE 1 – Corrigé

2 **4.** $[f(x)]^2 = \left(\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)^2 = \cos^2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{1}{2}\right)$.
Or d'après le formulaire $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$ et $\sin(2a) = \frac{1}{2}\cos(a)\sin(a)$, on en déduit que :

$$[f(x)]^2 = 1 + \sin(x).$$

3 **5.**

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^{\pi} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\,[x - \cos(x)]_0^{\pi} \\ &= \pi(\pi - \cos(\pi) - 0 + \cos(0)) \\ V &= \pi(\pi + 2) \end{aligned}$$

Problème : 10 points

1 **1.** On a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
On démontre de même que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

1,5 **2. a.** $f'(x) = e^x - \frac{1}{e^x} = \frac{e^{2x}-1}{e^x} = \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x}$.

2 **b.** Les facteurs $(e^x + 1)$ et e^x sont strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $(e^x - 1)$.
Or $(e^x - 1) > 0$ si et seulement si $x > 0$.

c) On en déduit le tableau de variations avec $f(0) = e^0 - \frac{5}{2} + \frac{1}{e^0} = 1 - \frac{5}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$.

1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

Bonus 1,5 pt

3. a. On calcule le discriminant $\Delta = 9$, il y a donc deux solutions réelles $X_1 = \frac{1}{2}$ et $X_2 = 2$.

b. $f(x) = 0$ si et seulement si $e^x - \frac{5}{2} + \frac{1}{e^x} = 0$. En réduisant au même dénominateur on obtient : $\frac{2(e^x)^2 - 5e^x + 2}{2e^x} = 0$. Or comme e^x est non nul, cela revient à résoudre l'équation $2(e^x)^2 - 5e^x + 2 = 0$.

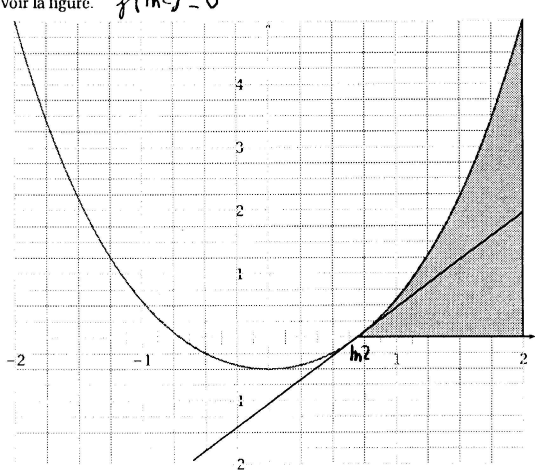
c. On a posé $X = e^x$, et on a vu qu'il y a deux solutions $X_1 = \frac{1}{2} = e^{x_1}$ donc grâce à la croissance de la fonction ln, $x_1 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ et de même $X_2 = 2 = e^{x_2}$ donne $x_2 = \ln(2)$.

d. Les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses sont $(-\ln(2)\,;0)$ et $(\ln(2)\,;0)$.

e. La fonction est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ donc $f(x) > 0$ pour $x < -\ln(2)$ et positif entre $\ln(2)$ et 0. Sur $\mathbb{R}^+$ la fonction est croissante, la fonction est donc négative entre 0 et $\ln(2)$ puis positive pour $x > \ln(2)$.

4. Une équation de la tangente au point d'abscisse $a = \ln(2)$ est donnée par : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Ce qui donne : $y = \frac{3}{2}(x - \ln(2)) = \frac{3}{2}x - \frac{3\ln(2)}{2}$.

0,5 **5.** Voir la figure. $f(\ln 2) = 0$



1 **6. a.** $F'(x) = e^x - \frac{5}{2} + e^{-x} = f(x)$. Donc F est une primitive de f.

2 **b.**

$$\begin{aligned} I &= \int_{\ln(2)}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{\ln(2)}^{2} \\ &= e^2 - 5 - \frac{1}{e^2} - e^{\ln(2)} + \frac{5}{2}\ln(2) + \frac{1}{e^{\ln(2)}} \\ &= e^2 - e^{-2} - 6{,}5 + \frac{5}{2}\ln(2)\text{u. a.} \end{aligned}$$

0,5 **c.** Voir la figure.

0,5 **d.** $A = 8I = 8e^2 - 8e^{-2} + 20\ln(2) - 52 \approx 19{,}89$ cm².

$A = 2I = 2e^2 - 2e^{-2} - 13 + 5\ln(2)$ cm² $\simeq 4{,}97$ cm²