Nom :	DS 8	Classe : T^{er} STI	/20

Exercice 1 : *Extrait d'un sujet de baccalauréat génie mécanique BCDE - France juin 2009.* 10 points

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Résoudre l'équation différentielle

$$4y'' + y = 0, \qquad \text{(E)}$$

ou y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et ou y'' désigne sa dérivée seconde.

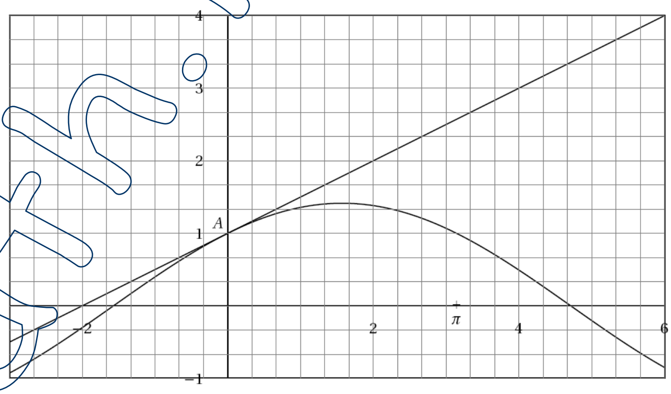
2. Le but de cette question est de trouver la solution particulière de (E), appelée f, dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est fournie en annexe. On note f' la fonction dérivée de f.

a. La courbe $\mathscr{C}_f$ passe par le point $A(0\,;1)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$. En déduire les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.

b. Montrer que la solution particulière f de l'équation (E) est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Annexe



3. Soit D le domaine du plan délimité par :
- l'axe des abscisses ;
- l'axe des ordonnées ;
- la droite d'équation $x = \pi$,
- la courbe $\mathscr{C}_f$.

Hachurer le domaine D sur la feuille annexe.

4. Montrer que $[f(x)]^2 = 1 + \sin(x)$.

5. On considère le solide de révolution engendré par la rotation du domaine D autour de l'axe des abscisses.

Calculer la valeur exacte, en unité de volume, du volume V de ce solide.

On rappelle que $V = \pi \displaystyle\int_0^{\pi} [f(x)]^2\,dx$.

Problème : *Extrait d'un sujet de baccalauréat génie mécanique BCDE - France juin 2009.* 10 points

Soit la fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression

$$f(x) = e^x - \frac{5}{2} + \frac{1}{e^x}.$$

On note f' sa fonction dérivée.

Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. **a.** Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{e^x}.$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 5X + 2 = 0$ d'inconnue X.

b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ équivaut à $2(e^x)^2 - 5e^x + 2 = 0$.

c. En utilisant la question a., résoudre l'équation $2(e^x)^2 - 5e^x + 2 = 0$.

d. Quelles sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses ?

e. En utilisant les résultats des questions 2. c. et 3. d. déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

4. Déterminer une équation de la droite $\mathscr{T}$ tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\ln(2)$.

Bonus

5. On donne ci-dessous (annexe 1) l'allure de la courbe $\mathscr{C}$, courbe représentative de la fonction f . Précisez par calcul la valeur de $f(\ln 2)$.

6. Soit la fonction F, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'expression $F(x) = e^x - \frac{5}{2}x - \frac{1}{e^x}$.

a. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire la valeur exacte de l'intégrale

$$I = \int_{\ln(2)}^{2} f(x)\,dx.$$

c. Hachurer sur le graphique la partie du plan dont l'intégrale I donne la valeur de l'aire A en unité d'aire.

d. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de l'aire A de la partie hachurée, exprimée en cm². On donnera ensuite une valeur approchée de A à 0,1 cm² près.

Annexe 1