

• Exercice n°1: 10 points

1) $g'(x) = -\frac{2\pi}{3} \sin(\frac{\pi}{3}x) + \frac{4\pi}{3} \cos(\frac{\pi}{3}x)$

$g''(x) = -\frac{2\pi^2}{9} \cos(\frac{\pi}{3}x) - \frac{4\pi^2}{9} \sin(\frac{\pi}{3}x)$

$\pi^2 \times g(x) + 9g''(x) = 0$

Comme $\pi^2 g(x) + 9g''(x) = 0$ alors g est solution de (E).

2a) $\pi^2 y + 9y'' = 0 \Leftrightarrow y'' + \frac{\pi^2}{9}y = 0$

les solutions sont du type $A \cos \frac{\pi}{3}x + B \sin \frac{\pi}{3}x$

b) $f(x) = A \cos \frac{\pi}{3}x + B \sin \frac{\pi}{3}x$

$f'(x) = -A \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3}x + B \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3}x$

$\begin{cases} A \cos 0 + B \sin 0 = 1 \\ -A \frac{\pi}{3} \sin 0 + B \frac{\pi}{3} \cos 0 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} A \cos 0 + B \sin 0 = 1 \\ -A \frac{\pi}{3} \sin 0 + B \frac{\pi}{3} \cos 0 = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$

$f(x) = \cos \frac{\pi}{3}x + \sin \frac{\pi}{3}x$

c) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} [\cos \frac{\pi}{3}x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3}x \sin \frac{\pi}{4}]$
 $= \sqrt{2} [\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{\pi}{3}x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\pi}{3}x]$
 $= \cos \frac{\pi}{3}x + \sin \frac{\pi}{3}x$
 $= f(x)$

Pour tout nombre réel x , $f(x) = \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{4})$

d) $f(x) = 1$

$\sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{4}) = 1$

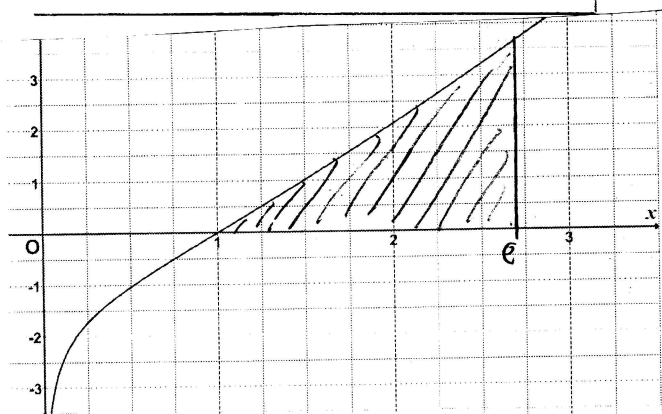
$\cos(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\arccos(\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{4}) = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$x = \frac{3}{2}$ ou $x = 0$

$S = \{\frac{3}{2}, 0\}$



• Problème:

Partie A:

1. $g(x)$ est positif sur $]0, +\infty[$

Partie B:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, la courbe $\mathcal{C}$ admet comme asymptote la droite d'équation $x = 0$ au voisinage de 0.

2) a) $f'(x) = 1 \times \ln x + (x+1) \times \frac{1}{x}$
 $= \ln x + \frac{1}{x} + 1$
 $= \frac{1}{x} (x \ln x + 1 + x)$
 $= \frac{1+x(\ln x + 1)}{x}$
 $= \frac{g(x)}{x}$

b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) > 0$

Tableau de variation de f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$-\infty$	$+\infty$

3) $f(x) = 0$

$(x+1) \ln x = 0$

$x+1 = 0$ ou $\ln x = 0$

$x = -1$ ou $x = 1$

$A(1; 0)$

5) $f(1) = 0$

4) $f(1) = 0$; $f(2) = 2 \ln 2$
 Comme sur $[1, 2]$, f est dérivable, strictement croissante et comme $f(1) < 1 < f(2)$, alors l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α .

Bonus
+0,5

Partie C:

1) $F'(x) = (x+1)(\ln x - 1) + (\frac{x^2}{2} + x) \times \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$

$= x \ln x + \ln x - x - 1 + \frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{2}$

$= x \ln x + \ln x$

$= (x+1) \ln x$

$= f(x)$

Comme $F'(x) = f(x)$, F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

2a) Voir courbe

$A = \int_1^e f(x) dx$

$= [F(x)]_1^e$

$= F(e) - F(1)$

$= \frac{e^2}{4} - (\frac{1}{4} + 1)(-1) - \frac{1}{4}$

$= \frac{e^2}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{4}$

$= \frac{e^2}{4} + \frac{5}{4}$ u.a.

$= e^2 + 5 \text{ cm}^2$